Ueber die

Anziehung eines aus homogenen Schichten gebildeten Ellipsoïds.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät

zu Marburg

eingereicht

von

Friedrich Seeger

aus Parey.

Marburg.

1878.

Die folgende Arbeit behandelt die Anziehung eines Ellipsoïds auf einen beliebig gelegenen Punkt*) für den Fall, dafs die Dichtigkeit des Ellipsoïds vom Centrum aus stetig und derart schalenförmig zunimmt, dafs die Punkte von gleicher Dichtigkeit ein dem gegebenen ähnliches Ellipsoïd bilden. Für den Gang der Untersuchung ist der von G. F. Meyer in seinen „Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale u. s. w." für das homogene Ellipsoïd eingeschlagene Weg zu Grunde gelegt.

Wählt man das Centrum des Ellipsoïds zum Coordinatenanfangspunkt und die Hauptachsen desselben zu Coordinatenachsen, so sind die Componenten der Anziehung nach den Richtungen der drei Achsen in diesem Falle :

$$X = \iiint \frac{x-a}{r} \cdot k\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)\frac{dx\,dy\,dz}{r^2}$$

$$Y = \iiint \frac{y-b}{r} \cdot k\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)\frac{dx\,dy\,dz}{r^2}$$

$$Z = \iiint \frac{z-c}{r} \cdot k\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)\frac{dx\,dy\,dz}{r^2}$$

worin

α, β, γ die drei Halbachsen,

a, b, c die Coordinaten des angezogenen Punktes,

$r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ den Abstand des anziehenden Massenelements vom angezogenen Punkte,

---

*) Eine kurze Darstellung der Entwicklung dieses Problems von Newton bis Laplace und Legendre findet man in den „Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnifs des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte von P. G. Lejeune-Dirichlet, herausgegeben von Grube". Als weitere Abhandlungen hierüber sind anzuführen :

Mehler, über die Anziehung einer von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades begrenzten Schale, Borchardt's Journal Bd. 60, S. 321.

Grube, über die Anziehung eines homogenen Ellipsoïds, daselbst Bd. 69, S. 359.

Mertens, Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoïds, daselbst Bd. 70, S. 1.

Overbeck, über das Potential des Ellipsoïds, Grunert's Archiv Theil 58, S. 113.

Züge, über die Anziehung eines homogenen Ellipsoïds, Mathematische Annalen Bd. 10, S. 273.

Mit Ausnahme der von Overbeck beziehen sich alle mir bis jetzt bekannten Arbeiten auf das homogene Ellipsoïd.

k eine Constante bezeichnet,

der Factor $\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)$ die stetige schalenförmige Aenderung der Dichtigkeit vom Centrum bis zur Oberfläche, von 0 bis 1, bewirkt, und

die Integration sich über das Volumen des Ellipsoïds erstreckt, d. h. der Ungleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2} \leqq 1$$

genügen muſs.

A. Der angezogene Punkt liege im Inneren des Ellipsoïds.

I.

Wir wollen uns im Folgenden zunächst auf die Componente in der Richtung der x-Achse beschränken. Aus der Form des Integrals ersieht man, daſs zwar die erste Integration nach x ausführbar, daſs aber schon die zweite in Folge der Wurzel unter der Wurzel, welche sich durch die Substitution der aus der Gleichung :

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

entnommenen Grenzwerthe von x ergeben würde, nicht mehr möglich ist.

Wir müssen deshalb zu Polarcoordinaten übergehen und wollen zugleich den angezogenen Punkt $[a\,b\,c]$ zum Coordinatenanfangspunkt nehmen.

Setzen wir

$$x = a + r\cos\vartheta, \quad y = b + r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad z = c + r\sin\vartheta\sin\varphi$$

so wird

$$X = k\iiint \cos\vartheta\,(lr^2 + 2mr + 1 - n)\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi,$$

während die Bedingungsgleichung übergeht in

$$lr^2 + 2mr = n,$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\vartheta\cos^2\varphi}{\beta^2}+\frac{\sin^2\vartheta\sin^2\varphi}{\gamma^2} = l$$

$$\frac{a\cos\vartheta}{\alpha^2}+\frac{b\sin\vartheta\cos\varphi}{\beta^2}+\frac{c\sin\vartheta\sin\varphi}{\gamma^2} = m$$

$$1-\left(\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}\right) = n$$

gesetzt ist.

Aus der obigen Gleichung ergeben sich zwar als Grenzwerthe von r die beiden Wurzeln :

$$\frac{-m+\sqrt{ln+m^2}}{l} \quad \text{und} \quad \frac{-m-\sqrt{ln+m^2}}{l};$$

da indessen l stets >0, und für einen im Inneren gelegenen Punkt n ebenfalls stets >0 ist, so ist auch der absolute Werth von $\sqrt{ln+m^2}$ stets $>m$; es würde somit

$$\frac{-m-\sqrt{ln+m^2}}{l}$$

auch für negative m stets einen negativen Werth besitzen; nun darf aber r nur absolut genommen werden, und es tritt demnach als untere Grenze der Werth 0 ein, was auch die geometrische Betrachtung sofort zeigt. Für φ und ϑ sind, weil der angezogene Punkt im Inneren liegt, also nach jeder Richtung hin anziehende Massentheilchen vorhanden sind, als Grenzen die constanten Werthe 0 und 2π für φ, 0 und π für ϑ zu nehmen. Setzen wir diese Grenzen ein, so erhalten wir für X den Werth

$$X = k\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \cos\vartheta \sin\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \, (lr^2 + 2mr + 1 - n)$$

und weiter, indem wir nach r integriren,

$$X = k\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \left[\frac{lr^3}{3} + mr^2 + (1-n)r\right].$$

Hierin haben wir jetzt für r seinen Werth $\dfrac{-m + \sqrt{ln + m^2}}{l}$ einzusetzen. Dies giebt

$$X = k\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \left[\begin{array}{l} \dfrac{l}{3}\,\dfrac{(ln+m^2)^{3/2} - 3(ln+m^2)m + 3(ln+m^2)^{1/2}m^2 - m^3}{l^3} \\ + m\,\dfrac{(ln+m^2) - 2(ln+m^2)^{1/2}m + m^2}{l^2} \\ + (1-n)\,\dfrac{(ln+m^2)^{1/2} - m}{l} \end{array}\right],$$

ein Integral, welches wegen der Werthe von l, m, n zwar sehr complicirt erscheint, welches sich aber, wie wir im Folgenden sehen werden, bedeutend vereinfachen läfst. Zerlegt man nämlich dasselbe in die beiden Theilintegrale $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}$ und $\int_0^{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}$ und setzt in letzterem $\vartheta = \pi - \vartheta$, $\varphi = \pi + \varphi$, so geht

$$k\int_0^{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$$

über in

$$-k\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta,$$

und die Klammer, da l sich nicht ändert, m gleich $-m$ wird, in

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{l}{3}\,\dfrac{(ln+m^2)^{3/2} + 3(ln+m^2)m + 3(ln+m^2)^{1/2}m^2 + m^3}{l^3} \\ - m\,.\,\dfrac{(ln+m^2) + 2(ln+m^2)^{1/2}m + m^2}{l^2} + (1-n)\,\dfrac{(ln+m^2)^{1/2} + m}{l} \end{array}\right]$$

das heifst aber: Alle diejenigen Integrale, deren in der Klammer befindliche Factoren durch diese Substitution ihr Vorzeichen nicht gewechselt haben, gehen auf der Strecke π bis 2π integrirt in den entgegengesetzten Werth über, sind also gleich 0. Es sind dies diejenigen, bei denen die Potenz von $(ln + m^2)$ ein Bruch ist, und es wird demnach

$$X = k\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \left[\frac{l}{3}\,\frac{-3(ln+m^2)m - m^3}{l^3} + m\,\frac{(ln+m^2)+m^2}{l^2} - \frac{(1-n)m}{l}\right]$$

oder zusammengezogen

$$X = k\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \left[{}^2/_3\,\frac{m^3}{l^2} - \frac{(1-n)m}{l}\right].$$

II.

Für die weitere Behandlung von X wollen wir das Integral trennen und setzen

$$X_1 = {}^2/_3 k \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, \frac{m^3}{l^2}$$

$$X_2 = -(1-n)k \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, \frac{m}{l}.$$

Bezeichnen wir dann zur Abkürzung

$$\frac{a\cos\vartheta}{\alpha^2} \text{ mit } f \text{ und } \left(\frac{b\cos\varphi}{\beta^2} + \frac{c\sin\varphi}{\gamma^2}\right)\sin\vartheta \text{ mit } g,$$

so daſs also $m = f + g$ ist, so geht X_1 über in

$$X_1 = {}^2/_3 k \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}{l^2} (f^3 + 3f^2 g + 3fg^2 + g^3).$$

Durch die Substitution von $\vartheta = \pi - \vartheta$ wird aber

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}{l^2} = -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}{l^2},$$

f nimmt ebenfalls den entgegengesetzten Werth an, während g unverändert bleibt; es wird also

$$X_1 \text{ auch } = -{}^2/_3 k \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}{l^2} (-f^3 + 3f^2 g - 3fg^2 + g^3)$$

oder, wenn man beide addirt und mit 2 dividirt

$$X_1 = {}^2/_3 k \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}{l^2} (f^3 + 3fg^2)$$

$$= {}^2/_3 k \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}{l^2} \left[\frac{a^3}{\alpha^6}\cos^3\vartheta + \frac{3a}{\alpha^2}\cos\vartheta \sin^2\vartheta \left(\frac{b^2}{\beta^4}\cos^2\varphi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2bc}{\beta^2\gamma^2}\cos\varphi \sin\varphi + \frac{c^2}{\gamma^4}\sin^2\varphi\right)\right].$$

Die letzte Vereinfachung erreichen wir endlich dadurch, daſs wir $\varphi = (2\pi - \varphi)$ setzen. Hierdurch ändert sich das Integral bis zur Klammer nicht, während von den 4 Factoren der Klammer der dritte : $\frac{2bc}{\beta^2\gamma^2}\cos\varphi \sin\varphi$ in den entgegengesetzten Werth übergeht, das betreffende Integral also analog den früheren gleich 0 wird. Es erhält somit X_1 den Werth

$$X_1 = {}^2/_3 k \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}{l^2} \left[\frac{a^3}{\alpha^6}\cos^3\vartheta + \frac{3a}{\alpha^2}\cos\vartheta \sin^2\vartheta \left(\frac{b^2}{\beta^4}\cos^2\varphi + \frac{c^2}{\gamma^4}\sin^2\varphi\right)\right]$$

oder, wenn wir noch für l seinen Werth substituiren,

$$X_1 = {}^2/_3 k \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}{\left(\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\vartheta\cos^2\varphi}{\beta^2} + \frac{\sin^2\vartheta\sin^2\varphi}{\gamma^2}\right)^2} \left[\frac{a^3}{\alpha^6}\cos^3\vartheta + \right.$$

$$\left. + \frac{3a}{\alpha^2}\cos\vartheta \sin^2\vartheta \left(\frac{b^2}{\beta^4}\cos^2\varphi + \frac{c^2}{\gamma^4}\sin^2\varphi\right)\right].$$

III.

Die erste Integration des vorstehenden Integrals läſst sich sowohl nach φ, als nach ϑ leicht ausführen. Im letzteren Falle würde man jedoch unter anderen auf ein Integral kommen von der Form

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{P}{Q^2} \int_0^{\pi} \frac{d\cos\vartheta}{P + Q\cos^2\varphi}$$

in welchem

$$P = \frac{\cos^2\varphi}{\beta^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\gamma^2}, \quad Q = \frac{1}{\alpha^2} - P$$

wäre, und die Integration nach ϑ, je nachdem $Q \gtrless 0$, einen *arctg* oder einen *log* ergäbe. Diese Schwierigkeit fällt bei der Integration nach φ weg, und wir wollen deshalb diesen Weg einschlagen. Zu diesem Zwecke geben wir X_1 folgende Gestalt

$$X_1 = {}^2/_3 k \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left[\begin{array}{l} \frac{a}{\alpha^2}\left(\frac{a^2}{\alpha^4}\cos^2\vartheta + \frac{3b^2}{\beta^4}\sin^2\vartheta\right)\cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta \cos^2\varphi\, d\varphi + \\ + \frac{a}{\alpha^2}\left(\frac{a^2}{\alpha^4}\cos^2\vartheta + \frac{3c^2}{\gamma^4}\sin^2\vartheta\right)\cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta \sin^2\varphi\, d\varphi \end{array}\right]}{\left[\left(\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{\beta^2}\right)\cos^2\varphi + \left(\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{\gamma^2}\right)\sin^2\varphi\right]^2}$$

und trennen dasselbe, indem wir gleichzeitig zur Abkürzung

$$\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{\beta^2} = A, \quad \frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{\gamma^2} = B$$

setzen, in die Theile

$$X_a = {}^2/_3 k \int_0^{\pi} \frac{a}{\alpha^2}\left(\frac{a^2}{\alpha^4}\cos^2\vartheta + \frac{3b^2}{\beta^4}\sin^2\vartheta\right)\cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)^2}$$

$$X_b = {}^2/_3 k \int_0^{\pi} \frac{a}{\alpha^2}\left(\frac{a^2}{\alpha^4}\cos^2\vartheta + \frac{3c^2}{\gamma^4}\sin^2\vartheta\right)\cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)^2}$$

Zerlegt man dann die Integrale nach φ in $\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}$, substituirt im letzteren $\varphi = \pi + \varphi$, und, nachdem dies geschehen, $\int_0^{\pi}$ in $\int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi}$ und substituirt in $\int_0^{\pi/2}$ bei X_a $\varphi = \pi/2 - \varphi$, in $\int_{\pi/2}^{\pi}$ bei X_a $\varphi = \pi/2 + \varphi$, bei X_b $\varphi = \pi - \varphi$, so gehen X_a und X_b über in

$$X_a = {}^2/_3 k \int_0^{\pi} \frac{a}{\alpha^2}\left(\frac{a^2}{\alpha^4}\cos^2\vartheta + \frac{3b^2}{\beta^4}\sin^2\vartheta\right)\cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\pi/2} \frac{4\sin^2\varphi\, d\varphi}{(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)^2}$$

$$X_b = {}^2/_3 k \int_0^{\pi} \frac{a}{\alpha^2}\left(\frac{a^2}{\alpha^4}\cos^2\vartheta + \frac{3c^2}{\gamma^4}\sin^2\vartheta\right)\cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\pi/2} \frac{4\sin^2\varphi\, d\varphi}{(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)^2}$$

Nun wird aber

$$\int_0^{\pi/2} \frac{4\sin^2\varphi\, d\varphi}{(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)^2},$$

wenn man mit $B^2\cos^4\varphi$ Zähler und Nenner dividirt und partiell integrirt

$$= \frac{2}{AB} \int_0^{\pi/2} \frac{d\,tg\,\varphi}{1 + \frac{A}{B} tg^2\varphi}$$

oder nach Ausführung der Integration

$$= \frac{\pi}{A\sqrt{AB}};$$

analog wird

$$\int_0^{\pi/2} \frac{4 \sin^2\varphi \, d\varphi}{(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)^2} = \frac{\pi}{B\sqrt{AB}}$$

und somit

$$X_a = {}^2/_3 k \int_0^{\pi} \frac{a}{\alpha^2}\left(\frac{a^2}{\alpha^4}\cos^2\vartheta + \frac{3b^2}{\beta^4}\sin^2\vartheta\right)\cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \frac{\pi}{A\sqrt{AB}}$$

$$X_b = {}^2/_3 k \int_0^{\pi} \frac{a}{\alpha^2}\left(\frac{a^2}{\alpha^4}\cos^2\vartheta + \frac{3c^2}{\gamma^4}\sin^2\vartheta\right)\cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \frac{\pi}{B\sqrt{AB}}.$$

IV.

Die Reduction des Integrals X_2 des Abschnitt II geschieht in derselben Weise; setzt man für m seinen Werth ein, so wird es

$$X_2 = -(1-n)k \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}{l}\left(\frac{a}{\alpha^2}\cos\vartheta + \frac{b}{\beta^2}\sin\vartheta\cos\varphi + \frac{c}{\gamma^2}\sin\vartheta\sin\varphi\right)$$

oder, wenn man wieder $\int_0^{2\pi}$ in $\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}$ zerlegt, im letzteren $\varphi = \pi + \varphi$ substituirt und beide addirt

$$X_2 = -(1-n)k \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}{l} \cdot \frac{2a}{\alpha^2}\cos\vartheta.$$

Zerlegt man das auf φ bezügliche Intervall noch in die Theile 0 bis $\pi/_2$ und $\pi/_2$ bis π, substituirt im letzteren $\varphi = \pi - \varphi$ und benutzt die in III zur Abkürzung eingeführten Werthe A und B, so geht X_2 über in

$$X_2 = -(1-n)k \frac{2a}{\alpha^2} \int_0^{\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \int_0^{\pi/2} \frac{2d\varphi}{A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi}$$

und nimmt, weil

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2d\varphi}{A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{AB}}$$

ist, schliefslich den Werth an

$$X_2 = -(1-n)k \frac{2a}{\alpha^2} \int_0^{\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta d\vartheta \frac{\pi}{\sqrt{AB}}.$$

V.

Die Addition der drei Integrale X_a, X_b, X_2 ergiebt jetzt

$$X = 2\pi k \frac{a}{\alpha^2} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{AB}} \left[\left(\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^4}\cos^2\vartheta + \frac{b^2}{\beta^4}\sin^2\vartheta\right)\frac{1}{A} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^4}\cos^2\vartheta + \frac{c^2}{\gamma^4}\sin^2\vartheta\right)\frac{1}{B} - \left(\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2}\right)\right],$$

welchen Ausdruck wir noch in folgender Weise umformen wollen. Geben wir ihm nämlich die Gestalt

$$X = 2\pi k \frac{a}{\alpha^2} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{AB}} \left\{\left[\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^4}\cos^2\vartheta - \frac{b^2}{\beta^2}\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2}\left(\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{\beta^2}\right)\right]\frac{1}{A} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^4}\cos^2\vartheta - \frac{c^2}{\gamma^2}\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2} + \frac{c^2}{\gamma^2}\left(\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{\gamma^2}\right)\right]\frac{1}{B} - \left(\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2}\right)\right\}$$

so heben sich unter Berücksichtigung, dafs $\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\vartheta}{\beta^2}=A$, $\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\vartheta}{\gamma^2}=B$ ist, die so in der ersten resp. zweiten Klammer erhaltenen Werthe $\frac{b^2}{\beta^2}$ und $\frac{c^2}{\gamma^2}$ gegen die in der dritten Klammer enthaltenen, und es bleibt für X der Werth übrig

$$X = 2\pi k\frac{a}{\alpha^2}\int_0^\pi \frac{\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{AB}}\left\{\left[\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^4}\cos^2\vartheta-\frac{b^2}{\beta^2}\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2}\right]\frac{1}{A}+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^4}\cos^2\vartheta-\frac{c^2}{\gamma^2}\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2}\right]\frac{1}{B}-\frac{a^2}{\alpha^2}\right\}$$
$$= -2\pi k\frac{a}{\alpha^4}\int_0^\pi \frac{\cos^4\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{AB}}\left\{\left[\frac{b^2}{\beta^2}-\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^2}\right]\frac{1}{A}+\left[\frac{c^2}{\gamma^2}-\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^2}\right]\frac{1}{B}+\frac{a^2}{\cos^2\vartheta}\right\}.$$

Zerlegen wir auch hier das Intervall 0 bis π in die Theilintervalle 0 bis $\pi/2$ und $\pi/2$ bis π, substituiren im letzteren $\vartheta=\pi-\vartheta$ und setzen zugleich für A und B ihre Werthe, so wird

$$X = -4\pi k\frac{a}{\alpha^4}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\vartheta}{\beta^2}\right)\left(\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\vartheta}{\gamma^2}\right)}}\left[\frac{\frac{b^2}{\beta^2}-\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^2}}{\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\vartheta}{\beta^2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\frac{c^2}{\gamma^2}-\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^2}}{\frac{\cos^2\vartheta}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\vartheta}{\gamma^2}}+\frac{a^2}{\cos^2\vartheta}\right]$$

oder, indem wir noch $\sin\vartheta$ durch $\cos\vartheta$ ausdrücken,

$$X = +4\pi k\frac{a}{\alpha^4}\int_0^{\pi/2} \frac{\beta\gamma\cos^4\vartheta\,d\cos\vartheta}{\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}\cos^2\vartheta\right)\left(1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}\cos^2\vartheta\right)}}\left[\frac{b^2-\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^2}\beta^2}{1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}\cos^2\vartheta}+\right.$$
$$\left.+\frac{c^2-\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^2}\gamma^2}{1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}\cos^2\vartheta}+\frac{a^2}{\cos^2\vartheta}\right].$$

Führen wir endlich statt $\cos\vartheta$ die Variable t ein, so erhält X die Gestalt

$$X = -4\pi k\,a\frac{\beta\gamma}{\alpha^4}\int_0^1 \frac{t^4dt}{\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}t^2\right)\left(1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}t^2\right)}}\left[\frac{b^2-\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^2}\beta^2}{1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}t^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{c^2-\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^2}\gamma^2}{1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}t^2}+\frac{a^2}{t^2}\right].$$

VI.

Die Berechnung der Componenten Y und Z auszuführen haben wir nicht nöthig. Denn da X, Y, Z symmetrisch gebaut sind, so ergeben sich die Werthe von Y und Z, wie dies auch

aus der geometrischen Anschauung leicht ersichtlich ist, durch cyklische Vertauschung der Gröfsen a, b, c und α, β, γ. Es sind demnach die drei Componenten

$$(1\,\alpha)\quad X = -4\pi k\, a\frac{\beta\gamma}{\alpha^4}\int_0^1 \frac{t^4 dt}{\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}t^2\right)\left(1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}t^2\right)}}\left[\frac{b^2-\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^2}\beta^2}{1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}t^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{c^2-\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^2}\gamma^2}{1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}t^2}+\frac{a^2}{t^2}\right]$$

$$(1\,\beta)\quad Y = -4\pi k\, b\frac{\gamma\alpha}{\beta^4}\int_0^1 \frac{t^4 dt}{\sqrt{\left(1+\frac{\gamma^2-\beta^2}{\beta^2}t^2\right)\left(1+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}t^2\right)}}\left[\frac{c^2-\frac{1}{3}\frac{b^2}{\beta^2}\gamma^2}{1+\frac{\gamma^2-\beta^2}{\beta^2}t^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{a^2-\frac{1}{3}\frac{b^2}{\beta^2}\alpha^2}{1+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}t^2}+\frac{b^2}{t^2}\right]$$

$$(1\,\gamma)\quad Z = -4\pi k\, c\frac{\alpha\beta}{\gamma^4}\int_0^1 \frac{t^4 dt}{\sqrt{\left(1+\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma^2}t^2\right)\left(1+\frac{\beta^2-\gamma^2}{\gamma^2}t^2\right)}}\left[\frac{a^2-\frac{1}{3}\frac{c^2}{\gamma^2}\alpha^2}{1+\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma^2}t^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{b^2-\frac{1}{3}\frac{c^2}{\gamma^2}\beta^2}{1+\frac{\beta^2-\gamma^2}{\gamma^2}t^2}+\frac{c^2}{t^2}\right].$$

Behufs weiterer Umformung dieser Integrale müssen wir ein Verhältnifs zwischen den Achsen festsetzen, und zwar sei $\alpha > \beta > \gamma$. Durch diese Annahme wird ersichtlich, dafs die Coëfficienten von t^2 unter der Wurzel verschiedene Vorzeichen besitzen — X hat in diesem Falle —, —, Y hat —, +, Z hat +, + —, und dafs somit für die weitere directe Reduction verschiedene Substitutionen angewandt werden müfsten. Um aber diese zu vermeiden, wollen wir X und Y einer Transformation unterwerfen, durch welche der Vortheil erreicht wird, dafs die t^2 unter den Wurzeln bei allen drei Integralen die nämlichen Coëfficienten erhalten. Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\beta^2-\gamma^2}{\gamma^2} = \lambda^2 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma^2} = \mu^2,$$

so dafs also $\mu^2 > \lambda^2$ ist, und

$$\frac{\gamma^2-\beta^2}{\beta^2} = \frac{-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad \frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2} = \frac{\mu^2-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{\lambda^2-\mu^2}{1+\mu^2}, \quad \frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{-\mu^2}{1+\mu^2}$$

wird, und substituiren in X $t = \frac{r\sqrt{1+\mu^2}}{\sqrt{1+\mu^2 r^2}}$, in Y $t = \frac{r\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda^2 r^2}}$, in Z $t = r$, so ergiebt die Ausführung dieser Substitution

$$(2\,\alpha)\quad X = -4\pi k\, a\frac{\alpha\beta}{\gamma^4}\int_0^1 \frac{r^4 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2r^2)(1+\mu^2r^2)^3}}\left[\frac{b^2-\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^2}\beta^2}{1+\lambda^2r^2}+\right.$$

$$\left.+\left(c^2-\frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^2}\gamma^2\right)+\frac{a^2}{(1+\mu^2)r^2}\right]$$

$$(2\,\beta)\quad Y = -4\pi k\, b\frac{\alpha\beta}{\gamma^4}\int_0^1 \frac{r^4 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2r^2)^3(1+\mu^2r^2)}}\left[\left(c^2-\frac{1}{3}\frac{b^2}{\beta^2}\gamma^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{a^2-\frac{1}{3}\frac{b^2}{\beta^2}\alpha^2}{1+\mu^2r^2}+\frac{b^2}{(1+\lambda^2)r^2}\right]$$

$$(2\,\gamma)\quad Z = -4\pi k\, c\frac{\alpha\beta}{\gamma^4}\int_0^1 \frac{r^4 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2r^2)(1+\mu^2r^2)}}\left[\frac{a^2-\frac{1}{3}\frac{c^2}{\gamma^2}\alpha^2}{1+\mu^2r^2}+\frac{b^2-\frac{1}{3}\frac{c^2}{\gamma^2}\beta^2}{1+\lambda^2r^2}+\frac{c^2}{r^2}\right].$$

VII.

Bevor wir diese Integrale weiter reduciren, wollen wir aus ihnen einige Schlüsse ziehen. Führen wir nämlich statt der Parallelcoordinaten des angezogenen Punktes Polarcoordinaten ein, indem wir

$$a = \varrho\cos\vartheta_1,\ b = \varrho\sin\vartheta_1\cos\varphi_1,\ c = \varrho\sin\vartheta_1\sin\varphi_1$$

setzen, so können wir in den drei Integralen unter (1) den Factor ϱ^3 abtrennen und setzen $X = \varrho^3 I_1$, $Y = \varrho^3 I_2$, $Z = \varrho^3 I_3$, wobei die Werthe von I_1, I_2, I_3 leicht ersichtlich sind. Die Resultante der Anziehung $R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ geht hierdurch über in $R = \varrho^3\sqrt{I_1^2+I_2^2+I_3^2}$. Läßt man nun den angezogenen Punkt sich auf demselben Radius fortbewegen, so ändern sich die drei Integrale I_1 I_2 I_3 nicht, weil ja die Winkel ϑ_1 und φ_1 dieselben bleiben; es ergiebt sich demnach aus dem vorstehenden Werthe von R der Satz:

1) Die Anziehung, welche ein in der oben angegebenen Weise inhomogenes Ellipsoïd *) auf zwei in seinem Inneren auf demselben Radius gelegene Punkte ausübt, ist proportional der dritten Potenz ihrer Abstände vom Centrum.

Bezeichnet man die Winkel, welche die Richtung der Resultante R mit den Coordinatenachsen bildet, mit λ, μ, ν, so ist

$$\cos\lambda = \frac{X}{R},\ \cos\mu = \frac{Y}{R},\ \cos\nu = \frac{Z}{R},\ \text{oder}\ \cos\lambda = \frac{I_1}{\sqrt{I_1^2+I_2^2+I_3^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{I_2}{\sqrt{I_1^2+I_2^2+I_3^2}},\ \cos\nu = \frac{I_3}{\sqrt{I_1^2+I_2^2+I_3^2}}.$$

*) Für zwei auf demselben Radius gelegene Punkte verhalten sich die Dichtigkeiten wie die Quadrate der Abstände.

Bewegt sich also der angezogene Punkt auf demselben Radius, so erleiden die Werthe $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, weil sie ϱ nicht enthalten, keine Aenderung, und es folgt hieraus :

2) Die Richtung der Resultante ist für alle auf demselben Radius gelegene Punkte die gleiche.

Für je zwei auf demselben Durchmesser in gleicher Entfernung gelegene Punkte sind also die Resultanten gleich, die Richtungen entgegengesetzt.

Lassen wir jetzt den angezogenen Punkt fest liegen und ändern die Achsen des Ellipsoïds proportional, betrachten also eine Schaar concentrischer, ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsoïde. Bleibt k constant, so geben die Werthe $(1\,\alpha)$, $(1\,\beta)$, $(1\,\gamma)$ die Componenten der Anziehung von Ellipsoïden an, welche sich vom Centrum bis zur Oberfläche in ähnlichen Schalen stetig ändern, jedoch so, dafs sie auf der Oberfläche die *gleiche* Dichtigkeit (ihr Maximum) besitzen *). Da nun die Achsen α, β, γ unter den Integralzeichen nicht getrennt, sondern nur als Quotienten gleich hoher Potenzen vorkommen, so ändern sich die Integrale, wenn α, β, γ proportional wachsen oder abnehmen — letzteres natürlich nur so lange, als der angezogene Punkt noch dem Ellipsoïd angehört —, nicht, während vor den Integralen die Achsen im Zähler in der zweiten, im Nenner in der vierten Potenz vorkommen; dies giebt den Satz :

3) Die Anziehung, welche zwei concentrische, ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsoïde, deren Dichtigkeit sich in der oben angegebenen Weise stetig ändert, jedoch so, dafs beide in der Oberfläche die *gleiche* Dichtigkeit (ihr Maximum) besitzen, auf denselben in ihrem Inneren gelegenen Punkt ausüben, ist umgekehrt proportional dem Quadrate zweier entsprechender Halbachsen.

Greifen wir zwei Ellipsoïde heraus und bezeichnen die entsprechenden Componenten mit X, Y, Z, X', Y', Z', die Resultanten mit R, R', die Richtungswinkel derselben mit λ, μ, ν, λ', μ', ν', so sind wieder $[2\,\alpha,\ \beta,\ \gamma]$

$$\cos\lambda = \frac{X}{R} = \frac{\left[\frac{\alpha\beta}{\gamma^4}\right]I_1}{\left[\frac{\alpha\beta}{\gamma^4}\right]\sqrt{I_1^2+I_2^2+I_3^2}}, \quad \cos\mu = \frac{Y}{R} = \frac{I_2}{\sqrt{I_1^2+I_2^2+I_3^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{Z}{R} = \frac{I_3}{\sqrt{I_1^2+I_2^2+I_3^2}}; \quad \cos\lambda' = \frac{X'}{R'} = \frac{\left[\frac{\alpha'\beta'}{\gamma'^4}\right]I'_1}{\left[\frac{\alpha'\beta'}{\gamma'^4}\right]\sqrt{I'^2_1+I'^2_2+I'^2_3}},$$

$$\cos\mu' = \frac{Y'}{R'} = \frac{I'_2}{\sqrt{I'^2_1+I'^2_2+I'^2_3}}, \quad \cos\nu' = \frac{Z'}{R'} = \frac{I'_3}{\sqrt{I'^2_1+I'^2_2+I'^2_3}},$$

wo die Werthe von I_1, I_2, I_3, I'_1, I'_2, I'_3 sich aus den Gleichungen $(2\,\alpha)$, $(2\,\beta)$, $(2\,\gamma)$ leicht ergeben. Weil nun $I'_1 = I_1$, $I'_2 = I_2$, $I'_3 = I_3$ ist, so ist demnach $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$, $\nu' = \nu$, d. h.

4) die Richtung der Resultante ist bei beiden Ellipsoïden dieselbe.

Das letztere Resultat erhält man auch leicht durch die folgende Betrachtung. Wählt man auf dem Radius, auf welchem der angezogene Punk $[a\,b\,c]$ liegt, einen Hülfspunkt $[a_1\,b_1\,c_1]$, welcher den Radius des kleineren Ellipsoïds in demselben Verhältnisse theilt, als der Punkt $[a\,b\,c]$ den Radius des gröfseren, so ist die Anziehung des gröfseren Ellipsoïds auf den Punkt

*) Die Dichtigkeiten aller Punkte, welche in diesen Ellipsoïden dieselben Coordinaten haben, verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Achsen der betreffenden Ellipsoïde.

$[a\,b\,c]$ proportional der des kleineren Ellipsoïds auf den Punkt $[a_1\,b_1\,c_1]$. Denn da beide Punkte den Radius in gleichem Verhältnisse theilen, die Aenderung der Dichtigkeit dieselbe ist, so kann man das kleinere als ein in verjüngtem Maſsstabe construirtes Abbild des gröſseren ansehen. Dann ist aber die Richtung der Resultante bei beiden dieselbe. Weil ferner die Punkte $[a\,b\,c]$ und $[a_1\,b_1\,c_1]$ auf demselben Radius liegen, so läſst sich in Bezug auf das kleinere Ellipsoïd der Satz 2) anwenden, und es folgt somit, daſs die obigen Resultanten dieselbe Richtung haben.

Es bleibt noch der Fall übrig, daſs auch k variabel ist; wir setzen es gleich der $p$ten Potenz einer der Halbachsen, beispielshalber $= \alpha^p$. Hierdurch wird die stetige schalenförmige Aenderung der Dichtigkeit nicht beeinträchtigt, das (in der Oberfläche gelegene) Maximum derselben bleibt aber nun *nicht* mehr *constant*, sondern ändert sich proportional der $p$ten Potenz der Halbachse α; man kann jedoch nicht die kleineren Ellipsoïde als *Theile* der gröſseren ansehen *).

Die Sätze 1) und 2), in denen es sich um die Anziehung desselben Ellipsoïds auf verschiedene Punkte handelt, gelten demnach ohne Weiteres auch für diesen Fall.

Auch Satz 4) behält seine Gültigkeit. Denn da die Componenten in Bezug auf die Achsen von derselben Dimension sind, als die Resultante, so sind die *cos* der Richtungswinkel von R, als Quotienten beider, von der Dimension 0, d. h. unabhängig von der Gröſse derselben.

Nur Satz 3) ändert sich und geht unter Berücksichtigung, daſs die soeben erwähnten Dimensionen von der Ordnung $(p-2)$ sind, über in

3 a) die Anziehung, welche concentrische, ähnliche und ähnlich gelegene, in der oben angegebenen Weise inhomogene Ellipsoïde auf denselben in ihrem Inneren gelegenen Punkt ausüben, ist proportional der $(p-2)$ten Potenz der entsprechenden Halbachsen.

Für den Specialfall $p = 2$ ist sie also constant, d. h.

Die Wirkung der durch die Differenz von zweien dieser Ellipsoïde entstehenden Schale auf einen in ihrem inneren Hohlraume gelegenen Punkt ist gleich 0 **).

B. Der angezogene Punkt liege aufserhalb des Ellipsoïds.

VIII.

Um die Componenten der Anziehung für einen aufserhalb des Ellipsoïds gelegenen Punkt zu bestimmen, wollen wir die Ivory'sche Substitution anwenden. Dieselbe lautet bekanntlich folgendermaſsen : Bezeichnen α, β, γ und α', β', γ' die Halbachsen zweier Ellipsoïde, a, b, c und a', b', c' die Coordinaten zweier Punkte, und sind diese 12 Gröſsen den 6 Bedingungsgleichungen unterworfen :

$$(3)\quad a^2+b^2+c^2+\alpha^2 = a'^2+b'^2+c'^2+\alpha'^2;\quad a\alpha = a'\alpha',\ b\beta = b'\beta',\ c\gamma = c'\gamma';$$
$$\alpha^2-\beta^2 = \alpha'^2-\beta'^2,\quad \alpha^2-\gamma^2 = \alpha'^2-\gamma'^2$$

*) Hier verhalten sich die Dichtigkeiten für Punkte mit gleichen Coordinaten wie die $(p-2)$ten Potenzen der Achsen.

**) Wegen $(p-2) = 0$ haben Punkte mit gleichen Coordinaten *jetzt* gleiche Dichtigkeit; die kleineren Ellipsoïde sind *Theile* der gröſseren. Vgl. Duhamel, Mechanik, S. 155.

so verhalten sich die Attractionscomponenten des Ellipsoïds $[\alpha\beta\gamma]$ in Bezug auf den Punkt $[a\,b\,c]$ zu den entsprechenden des Ellipsoïds $[\alpha'\beta'\gamma']$ in Bezug auf den Punkt $[a'b'c']$ wie die Producte aus den beiden auf die Richtung der betreffenden Componente senkrecht stehenden Achsen; d. h., wenn wir diese Componenten mit X, Y, Z, X', Y', Z' bezeichnen, $X : X' = \beta\gamma : \beta'\gamma'$, $Y : Y' = \gamma\alpha : \gamma'\alpha'$, $Z : Z' = \alpha\beta : \alpha'\beta'$. Geometrisch bedeuten die obigen Gleichungen, daſs die beiden Ellipsoïde confocal sind, und daſs der Punkt $[a'b'c']$ auf dem Ellipsoïde $[\alpha\beta\gamma]$, der Punkt $[a\,b\,c]$ auf dem Ellipsoïde $[\alpha'\beta'\gamma']$ liegt. Ist also $\alpha' > \alpha$, $\beta' > \beta$, $\gamma' > \gamma$, so liegt der Punkt $[a'b'c']$ innerhalb von $[\alpha'\beta'\gamma']$, der Punkt $[a\,b\,c]$ auſserhalb von $[\alpha\beta\gamma]$, und es ist somit die Anziehung in Bezug auf einen äuſseren Punkt zurückgeführt auf die in Bezug auf einen inneren Punkt genommene.

Diese Substitution gilt zunächst zwar nur für das homogene Ellipsoïd, jedoch für jedes Anziehungsgesetz. Nun ist es für die Rechnung offenbar gleichgültig, wie man einen darin vorkommenden Factor interpretirt, d. h. für unseren Fall, ob man sagt: der Dichtigkeitsfactor ist $[lr^2 + 2mr + (1-n)]$, und das Anziehungsgesetz lautet $\frac{1}{r^2}$, oder ob man sagt: die Dichtigkeit ist constant, das Anziehungsgesetz lautet $\frac{lr^2 + 2mr + (1-n)}{r^2}$. Mit Hülfe dieser letzteren Anschauung ist aber die Ivory'sche Substitution anwendbar.

Zuvor müssen wir jedoch die Integrale $(1\,\alpha)$, $(1\,\beta)$, $(1\,\gamma)$ noch einer Transformation unterwerfen. Setzen wir $t^2 = \frac{1}{1+\lambda s}$, wo λ für X, Y, Z resp. gleich $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\beta^2}$, $\frac{1}{\gamma^2}$ ist, so gehen dieselben über in

$$X = -2\pi a\,k\,\alpha\beta\gamma \int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+s)\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)(\gamma^2+s)}} \left[\frac{b^2 - \frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^2}\beta^2}{\beta^2+s} + \frac{c^2 - \frac{1}{3}\frac{a^2}{\alpha^2}\gamma^2}{\gamma^2+s} + \frac{a^2}{\alpha^2} \right]$$

$$Y = -2\pi b\,k\,\alpha\beta\gamma \int_0^\infty \frac{ds}{(\beta^2+s)\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)(\gamma^2+s)}} \left[\frac{c^2 - \frac{1}{3}\frac{b^2}{\beta^2}\gamma^2}{\gamma^2+s} + \frac{a^2 - \frac{1}{3}\frac{b^2}{\beta^2}\alpha^2}{\alpha^2+s} + \frac{b^2}{\beta^2} \right]$$

$$Z = -2\pi c\,k\,\alpha\beta\gamma \int_0^\infty \frac{ds}{(\gamma^2+s)\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)(\gamma^2+s)}} \left[\frac{a^2 - \frac{1}{3}\frac{c^2}{\gamma^2}\alpha^2}{\alpha^2+s} + \frac{b^2 - \frac{1}{3}\frac{c^2}{\gamma^2}\beta^2}{\beta^2+s} + \frac{c^2}{\gamma^2} \right]$$

und es sind demnach, wenn wir mit X_a, Y_a, Z_a die Componenten der Anziehung des Ellipsoïds $[\alpha\beta\gamma]$ auf den auſserhalb desselben gelegenen Punkt $[a\,b\,c]$ bezeichnen

$$X_a = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'} \cdot -2\pi a'\,k\,\alpha'\beta'\gamma' \int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha'^2+s)\sqrt{(\alpha'^2+s)(\beta'^2+s)(\gamma'^2+s)}} \left[\frac{b'^2 - \frac{1}{3}\frac{a'^2}{\alpha'^2}\beta'^2}{\beta'^2+s} + \right.$$

$$\left. + \frac{c'^2 - \frac{1}{3}\frac{a'^2}{\alpha'^2}\gamma'^2}{\gamma'^2+s} + \frac{a'^2}{\alpha'^2} \right]$$

$$Y_a = \frac{\gamma\alpha}{\gamma'\alpha'} \cdot -2\pi b' k \alpha'\beta'\gamma' \int_0^\infty \frac{ds}{(\beta'^2+s)\sqrt{(\alpha'^2+s)(\beta'^2+s)(\gamma'^2+s)}} \left[\frac{c'^2 - \frac{1}{3}\frac{b'^2}{\beta'^2}\gamma'^2}{\gamma'^2+s} + \frac{a'^2 - \frac{1}{3}\frac{b'^2}{\beta'^2}\alpha'^2}{\alpha'^2+s} + \frac{b'^2}{\beta'^2} \right]$$

$$Z_a = \frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'} \cdot -2\pi c' k \alpha'\beta'\gamma' \int_0^\infty \frac{ds}{(\gamma'^2+s)\sqrt{(\alpha'^2+s)(\beta'^2+s)(\gamma'^2+s)}} \left[\frac{a'^2 - \frac{1}{3}\frac{c'^2}{\gamma'^2}\alpha'^2}{\alpha'^2+s} + \frac{b'^2 - \frac{1}{3}\frac{c'^2}{\gamma'^2}\beta'^2}{\beta'^2+s} + \frac{c'^2}{\gamma'^2} \right].$$

Hierin besitzen α', β', γ', a', b', c' die aus den Gleichungen 3) sich ergebenden Werthe, und zwar ist $\alpha'^2 = \alpha^2+\sigma$, $\beta'^2 = \beta^2+\sigma$, $\gamma'^2 = \gamma^2+\sigma$, wo σ die einzige positive Wurzel der Gleichung $\frac{a^2}{\alpha^2+\sigma} + \frac{b^2}{\beta^2+\sigma} + \frac{c^2}{\gamma^2+\sigma} = 1$ bezeichnet.

IX.

Setzen wir zur weiteren Reduction dieser Integrale $s = s - \sigma$ und eliminiren gleichzeitig die Hülfsgrößen a', b', c', α', β', γ' vermittelst der Gleichungen (3) und der daraus am Ende von VIII. gefundenen Werthe von α'^2, β'^2, γ'^2, so erhalten wir

$$X_a = -2\pi k a \alpha\beta\gamma \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+s)\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)(\gamma^2+s)}} \left[\frac{\frac{b^2\beta^2}{\beta^2+\sigma} - \frac{1}{3}\frac{a^2\alpha^2}{(\alpha^2+\sigma)^2}(\beta^2+\sigma)}{\beta^2+s} + \frac{\frac{c^2\gamma^2}{\gamma^2+\sigma} - \frac{1}{3}\frac{a^2\alpha^2}{(\alpha^2+\sigma)^2}(\gamma^2+\sigma)}{\gamma^2+s} + \frac{\frac{a^2\alpha^2}{(\alpha^2+\sigma)^2}\alpha^2}{\alpha^2} \right]$$

$$Y_a = -2\pi k b \alpha\beta\gamma \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\beta^2+s)\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)(\gamma^2+s)}} \left[\frac{\frac{c^2\gamma^2}{(\gamma^2+\sigma)} - \frac{1}{3}\frac{b^2\beta^2}{(\beta^2+\sigma)^2}(\gamma^2+\sigma)}{\gamma^2+s} + \frac{\frac{a^2\alpha^2}{\alpha^2+\sigma} - \frac{1}{3}\frac{b^2\beta^2}{(\beta^2+\sigma)^2}(\alpha^2+\sigma)}{\alpha^2+s} + \frac{\frac{b^2\beta^2}{(\beta^2+\sigma)^2}\beta^2}{\beta^2} \right]$$

$$Z_a = -2\pi k c \alpha\beta\gamma \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\gamma^2+s)\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)(\gamma^2+s)}} \left[\frac{\frac{a^2\alpha^2}{\alpha^2+\sigma} - \frac{1}{3}\frac{c^2\gamma^2}{(\gamma^2+\sigma)^2}(\alpha^2+\sigma)}{\alpha^2+s} + \frac{\frac{b^2\beta^2}{\beta^2+\sigma} - \frac{1}{3}\frac{c^2\gamma^2}{(\gamma^2+\sigma)^2}(\beta^2+\sigma)}{\beta^2+s} + \frac{\frac{c^2\gamma^2}{(\gamma^2+\sigma)^2}\gamma^2}{\gamma^2} \right].$$

Der Vergleich dieser Integrale mit den auf den im Inneren liegenden Punkt bezüglichen zeigt, daſs beide dieselbe Gestalt haben, nur daſs dort die untere Grenze 0, hier σ ist, wir können also die vorhin benutzte Substitution $t^2 = \frac{1}{1+\lambda s}$ jetzt rückwärts anwenden. Setzen wir noch die Zähler der in der Klammer vorkommenden Brüche zur Abkürzung der Reihe nach gleich A'_1, A'_2, A'_3, B'_1, B'_2, B'_3, C'_1, C'_2, C'_3, so werden die Componenten

$$X_a = -4\pi k\, a \frac{\beta\gamma}{\alpha^4} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\sigma}}} \frac{t^4 dt}{\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}t^2\right)\left(1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}t^2\right)}} \left[\frac{A'_1}{1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}t^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{A'_2}{1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}t^2} + \frac{A'_3}{t^2} \right]$$

$$Y_a = -4\pi k\, b \frac{\gamma\alpha}{\beta^4} \int_0^{\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\sigma}}} \frac{t^4 dt}{\sqrt{\left(1+\frac{\gamma^2-\beta^2}{\beta^2}t^2\right)\left(1+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}t^2\right)}} \left[\frac{B'_1}{1+\frac{\gamma^2-\beta^2}{\beta^2}t^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{B'_2}{1+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}t^2} + \frac{B'_3}{t^2} \right]$$

$$Z_a = -4\pi k\, c \frac{\alpha\beta}{\gamma^4} \int_0^{\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\sigma}}} \frac{t^4 dt}{\sqrt{\left(1+\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma^2}t^2\right)\left(1+\frac{\beta^2-\gamma^2}{\gamma^2}t^2\right)}} \left[\frac{C'_1}{1+\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma^2}t^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{C'_2}{1+\frac{\beta^2-\gamma^2}{\gamma^2}t^2} + \frac{C'_3}{t^2} \right]$$

und gehen schlieſslich vermittelst der in VI auf die Integrale $1\,\alpha$, $1\,\beta$, $1\,\gamma$ angewandten Substitutionen über in

$$(4\,\alpha) \quad X_a = -4\pi k\, a \frac{\alpha\beta}{\gamma^4} \int_0^{\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\sigma}}} \frac{r^4 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)(1+\mu^2 r^2)^3}} \left[\frac{A'_1}{1+\lambda^2 r^2} + A'_2 + \frac{A'_3}{(1+\mu^2) r^2} \right]$$

$$(4\,\beta) \quad Y_a = -4\pi k\, b \frac{\alpha\beta}{\gamma^4} \int_0^{\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\sigma}}} \frac{r^4 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)^3(1+\mu^2 r^2)}} \left[B'_1 + \frac{B'_2}{1+\mu^2 r^2} + \frac{B'_3}{(1+\lambda^2) r^2} \right]$$

$$(4\,\gamma) \quad Z_a = -4\pi k\, c \frac{\alpha\beta}{\gamma^4} \int_0^{\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\sigma}}} \frac{r^4 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)(1+\mu^2 r^2)}} \left[\frac{C'_1}{1+\mu^2 r^2} + \frac{C'_2}{1+\lambda^2 r^2} + \frac{C'_3}{r^2} \right].$$

Wir hätten jetzt nachzusehen, ob sich nicht in ähnlicher Weise, wie wir es in VII gethan haben, aus den vorstehenden Werthen Lehrsätze ableiten lassen. Dies ist jedoch nicht möglich. Im ersten Falle, in welchem das anziehende Ellipsoïd das nämliche bleibt, und der angezogene

Punkt sich auf demselben Radiusvector bewegt, ändern sich zwar a, b, c proportional, aber nicht die Achsen des durch $[a\,b\,c]$ gelegten confocalen Ellipsoïds : $\alpha' = \sqrt{\alpha^2 + \sigma}$, $\beta' = \sqrt{\beta^2 + \sigma}$, $\gamma' = \sqrt{\gamma^2 + \sigma}$, und somit auch nicht die Werthe A'_1, A'_2 . . . C'_3 und die Grenze $\frac{\gamma}{\gamma'}$.

Im zweiten Falle, in welchem der angezogene Punkt derselbe blieb, aber verschiedene Ellipsoïde gewählt waren, dürfen wir jetzt keine ähnlichen nehmen, weil dieselben nicht unter sich, also auch nicht mit einem dritten gleichzeitig confocal sind; bei confocalen aber ändern sich die Achsen nicht proportional. Auch eine Modification des Mac Laurin'schen Satzes ist nicht möglich, weil in den Klammern die einzelnen Halbachsen getrennt vorkommen.

Lassen wir den angezogenen Punkt aus dem äufseren Raume in die Oberfläche übertreten, so wird $\sigma = 0$, und die Werthe (4α), (4β), (4γ) gehen in (2α), (2β), (2γ) über; hieraus folgt, dafs die Anziehung beim Uebergange des angezogenen Punktes aus dem inneren in den äufseren Raum sich stetig ändert.

X.

Es bleibt uns nur noch übrig, die Integrale (2α), (2β), (2γ), (4α), (4β), (4γ) auf elliptische zurückzuführen; und zwar werden wir nur solche der ersten und zweiten Art erhalten. Lösen wir die Klammern auf, so sind die vorkommenden Formen, abgesehen von den Constanten, die folgenden :

1) $\int \frac{r^4 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)^3 (1+\mu^2 r^2)^3}}$ 2) $\int \frac{r^4 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)^3 (1+\mu^2 r^2)}}$ 3) $\int \frac{r^4 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)(1+\mu^2 r^2)^3}}$

4) $\int \frac{r^2 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)^3 (1+\mu^2 r^2)}}$ 5) $\int \frac{r^2 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)(1+\mu^2 r^2)^3}}$ 6) $\int \frac{r^2 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)(1+\mu^2 r^2)}}$

und diese gehen, wenn wir $\mu r = tg\,\varphi$, $\frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu^2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \gamma^2} = k^2$ setzen, über in

$$1) \int \frac{r^4 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)^3 (1+\mu^2 r^2)^3}} = \frac{1}{\mu^5} \int \frac{sin^4\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-k^2 sin^2\varphi)^3}} = \frac{1}{\mu^5 k^2} \left[\int \frac{sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-k^2 sin^2\varphi)^3}} - \int \frac{sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-k^2 sin^2\varphi)}} \right]$$

$$2) \int \frac{r^4 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)^3 (1+\mu^2 r^2)}} = \frac{1}{\mu^5} \int \frac{sin^4\varphi\, d\varphi}{cos^2\varphi \sqrt{(1-k^2 sin^2\varphi)^3}} =$$

$$= \frac{1}{\mu^5 (1-k^2)} \left[\int \frac{sin^2\varphi\, d\varphi}{cos^2\varphi \sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}} - \int \frac{sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-k^2 sin^2\varphi)^3}} \right]$$

$$3) \int \frac{r^4 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)(1+\mu^2 r^2)^3}} = \frac{1}{\mu^5} \int \frac{sin^4\varphi\, d\varphi}{cos^2\varphi \sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}} = \frac{1}{\mu^5} \left[\int \frac{sin^2\varphi\, d\varphi}{cos^2\varphi \sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}} - \int \frac{sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}} \right]$$

$$4) \int \frac{r^2 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)^3 (1+\mu^2 r^2)}} = \frac{1}{\mu^3} \int \frac{sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-k^2 sin^2\varphi)^3}}$$

$$5) \int \frac{r^2 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)(1+\mu^2 r^2)^3}} = \frac{1}{\mu^3} \int \frac{sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}}$$

$$6)\quad \int \frac{r^2 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)(1+\mu^2 r^2)}} = \frac{1}{\mu^3}\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

In Bezug auf die Grenzen wollen wir $\mu = \frac{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}{\gamma} = tg\,\vartheta$, $\mu\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}{\gamma'} = tg\,\tau$ setzen; hierdurch erhalten die Integrale (2) die Grenzen 0 und ϑ, die Integrale (4) die Grenzen 0 und τ. Führen wir noch die für die elliptischen Integrale gebräuchlichen Abkürzungen

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta(\varphi),\quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\varphi),\quad \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = E(k,\varphi)$$

ein und berücksichtigen, dafs

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{F(k,\varphi)-E(k,\varphi)}{k^2},$$

$$\int_0^\varphi \frac{tg^2\varphi\, d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{\Delta(\varphi)\, tg\,\varphi - E(k,\varphi)}{1-k^2},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{[\Delta(\varphi)]^3} = \frac{1}{1-k^2}\left[\frac{E(k,\varphi)-(1-k^2)F(k,\varphi)}{k^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}\right]$$

ist, so erhalten die obigen 6 Integrale, zwischen den Grenzen 0 und φ genommen, die Werthe

$$1)\quad \int \frac{r^4 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)^3(1+\mu^2 r^2)^3}} = \frac{1}{\mu^5 k^2}\left[\frac{1}{1-k^2}\left(\frac{E(k,\varphi)-(1-k^2)F(k,\varphi)}{k^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}\right) - \frac{F(k,\varphi)-E(k,\varphi)}{k^2}\right]$$

$$2)\quad \int \frac{r^4 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)^3(1+\mu^2 r^2)}} = \frac{1}{\mu^5(1-k^2)}\left[\frac{\Delta(\varphi)\, tg\,\varphi - E(k,\varphi)}{1-k^2} - \frac{1}{1-k^2}\left(\frac{E(k,\varphi)-(1-k^2)F(k,\varphi)}{k^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}\right)\right]$$

$$3)\quad \int \frac{r^4 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)(1+\mu^2 r^2)^3}} = \frac{1}{\mu^5}\left[\frac{\Delta(\varphi)\, tg\,\varphi - E(k,\varphi)}{1-k^2} - \frac{F(k,\varphi)-E(k,\varphi)}{k^2}\right]$$

$$4)\quad \int \frac{r^2 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)^3(1+\mu^2 r^2)}} = \frac{1}{\mu^3(1-k^2)}\left[\frac{E(k,\varphi)-(1-k^2)F(k,\varphi)}{k^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}\right]$$

$$5)\quad \int \frac{r^2 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)(1+\mu^2 r^2)^3}} = \frac{1}{\mu^3}\cdot\frac{F(k,\varphi)-E(k,\varphi)}{k^2}$$

$$6)\quad \int \frac{r^2 dr}{\sqrt{(1+\lambda^2 r^2)(1+\mu^2 r^2)}} = \frac{1}{\mu^3}\cdot\frac{\Delta(\varphi)\, tg\,\varphi - E(k,\varphi)}{1-k^2},$$

in welchen für die auf den inneren Punkt bezüglichen Integrale $\varphi = \vartheta$, für die auf den äufseren Punkt bezüglichen $\varphi = \tau$ zu setzen ist.

Wir haben nun diese Ausdrücke in 2) und 4) einzusetzen. Da wir jedoch hierdurch ziemlich complicirte Formeln erhalten würden, so wollen wir die ersteren, in welchen $\varphi = \vartheta$ gesetzt ist, kurz mit I_1, I_2 . . . I_6, die letzteren, τ enthaltenden, mit I'_1, I'_2 . . . I'_6 bezeichnen. Setzen wir noch, wie wir es in IX gethan haben, die Zähler der in den Klammern von (2α), (2β), (2γ) vorkommenden Brüche der Reihe nach gleich A_1, A_2, A_3, B_1 . . . C_3 und den vor den Integralen stehenden Factor $-4\pi k\frac{\alpha\beta}{\gamma^4} = P$, so erhalten wir als Endwerthe für die Componenten

$$X_i = P.a\left[A_1I_1 + A_2I_3 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2}A_3I_5\right]$$
$$Y_i = P.b\left[B_1I_2 + B_2I_1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2}B_3I_4\right]$$
$$Z_i = P.c\left[C_1I_3 + C_2I_2 + C_3I_6\right]$$
$$X_a = P.a\left[A'_1I'_1 + A'_2I'_3 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2}A'_3I'_5\right]$$
$$Y_a = P.b\left[B'_1I'_2 + B'_2I'_1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2}B'_3I'_4\right]$$
$$Z_a = P.c\left[C'_1I'_3 + C'_2I'_2 + C'_3I'_6\right].$$

Die Resultanten sind demnach

$$R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}, \qquad R_a = \sqrt{X_a^2 + Y_a^2 + Z_a^2},$$

und die Winkel, welche sie mit den Coordinatenachsen einschliefsen,

$$\cos\alpha = \frac{X_i}{R_i} \qquad \cos\beta = \frac{Y_i}{R_i} \qquad \cos\gamma = \frac{Z_i}{R_i}$$
$$\cos\alpha' = \frac{X_a}{R_a} \qquad \cos\beta' = \frac{Y_a}{R_a} \qquad \cos\gamma' = \frac{Z_a}{R_a}.$$

Druck von Wilhelm Keller in Giefsen.